Classe 13/11: notes d'aclariment

1. *Exercici 53(a)*

Solució

VERSIÓ 1. Direm que una cadena és *reconstruïble* si es pot reconstruir com a seqüència de mots vàlida (és a dir, de mots que pertanyen al diccionari). El nostre problema és dir si una seqüència $s[1 \ldots n]$ donada és reconstruïble. Basats en això, podem definir l'expressió

$$R(i) \equiv s[i \ldots n] \text{ és reconstruïble}$$

per a representar els nostres (sub)problemes. De manera que el problema original equival a computar $R(1)$.

Observem que si una frase és reconstruïble, aleshores tindrà una primera paraula que pertany al diccionari i el resta de la seqüència, llevat d'aquesta paraula inicial, ha de ser reconstruïble (aquesta segona part serà el subproblema). Aquesta observació ens permet especificar com es calculen els diferents valors de $R(i)$, és a dir, la recurrència:

$$\forall i : 1 \leq i < n : R(i) = \begin{cases} \text{cert, si } \exists j : i < j < n \text{ tal que } D(s[i \ldots j]) \wedge R(j+1) \\ \text{fals, } \textit{altrament} \end{cases}$$

és a dir, la subseqüència $s[i \ldots n]$ (sufix de l'original) és reconstruïble si hi ha alguna paraula $s[i \ldots j]$, que comença al caràcter i i acaba al j (el punt de tall que estem provant), que és al diccionari i la resta de seqüència després d'aquesta j és una seqüència reconstruïble.

El cas base més simple ens els proporciona la darrera lletra de la seqüència original (podríem ampliar-los a una determinada llargària de sufix). Si aquesta lletra pertany al diccionari, la subseqüència formada per la lletra $s[n]$ és reconstruïble; altrament no ho és, és a dir,

$$R(n) = D(s[n]).$$

El cost d'aquesta proposta de PD és $O(n^2)$.

VERSIÓ 2. També podem plantejar una solució pensant en un subseqüència qualsevol (no necessàriament sufix) de la seqüència original. Aleshores el punt de tall no estarà separant una paraula d'una subseqüència (el subproblema), sinò dues subseqüències i, per tant, en aquest cas tenim dos subproblemes. Definim:

$$R(i, j) \equiv s[i \ldots j] \text{ és reconstruïble}$$

De manera que el problema original equival a computar $R(1, n)$.

Una subseqüència $s[i \ldots j]$ qualsevol serà reconstruïble si, o bé directament és una paraula del diccionari, o bé la podem particionar en dos trossos, essent ambdós reconstruïbles. Aquesta observació ens permet especificar com es calculen els diferents valors de $R(i, j)$, és a dir, la recurrència:

$$\forall i,j : 1 \leq i \leq j \leq n : R(i,j) = \begin{cases} \text{cert, si } D(s[i \ldots j]) \vee \exists k : i \leq k < j \text{ tal que } R(i,k) \wedge R(k+1,j) \\ \text{fals, } \textit{altrament} \end{cases}$$

Podem considerar com a casos base més simples els que proporcionen cadascuna de les subseqüències de longitud 1 de la seqüència original. Si la lletra $s[i]$ pertany al diccionari, la subseqüència formada per ella és reconstruïble; altrament no ho és, és a dir,

$$\forall i : 1 \leq i \leq n : R(i,i) = D(s[i]).$$

Fixeu-vos que, a l'hora d'implementar aquesta solució, utilitzarem una taula $n \times n$, de la qual només farem servir la meitat superior (diagonal principal inclosa). A la diagonal trobarem els casos base de la recurrència, que representen les subseqüències de longitud 1. Després anirem emplenant la taula per diagonals (les diagonals superiors a la principal), que aniran representant, respectivament, les subseqüències de longitud 2, 3, etc. La darrera diagonal superior és l'element $R(1,n)$ i és la nostra solució.
El cost d'aquesta proposta de PD és $O(n^2)$.